Bernoullische Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y$ mit gegebenen Funktionen $f_0, f_1 : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$[a] heißt eine *Bernoullische Differentialgleichung*.
Durch die Transformation $y(x) = z^\beta(x)$ lässt sich eine solche Differentialgleichung auf eine lineare Differentialgleichung der Form

$$z' = a(x)\, z + s(x)$$

für z zurückführen.

a) Bestimmen Sie $\beta, a(x)$ und $s(x)$ aus $\alpha, f_0(x)$ und $f_1(x)$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y, \quad y(1) = \frac{2}{3}.$$

[a] Für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$ ist die Gleichung bereits eine lineare inhomogene bzw. homogene Differentialgleichung.